LIMITI

- Calcolo di limiti mediante sostituzione (la logica della sostituzione è vedere cosa succede sostituendo valori vicinissimi al valore che interessa (oppure il valore stesso se la funzione è definita)
  - 1.caso: la forma non indeterminata, si ottiene subito il risultato del limite
  - 2.caso: la forma è del tipo [1/0] il limite è infinito
  - 3.caso: la forma è [1/inf] il limite vale 0
  - 4.caso : la forma è indeterminata. Forma indeterminata non significa che non esiste il limite, ma che la funzione è da rimaneggiare in modo da vedere quanto vale il limite
    - nota: quando parliamo di forme 1/0, 0/0 ecc.parliamo di funzioni nelle quali quando la x si avvicina a un certo valore le funzioni si avvicinano a quei rapporti che non sono mai altrimenti non avrebbero senso.
    - $\frac{0}{0}$
      - se un polinomio si annulla per un valore xo (ma la cosa è estendibile anche ad altre espressioni) è divisibile per x-xo, l"idea è quella di mettere in evidenza il termine x-xo, di grado massimo da denominatore e numeratore e semplificare.
        - se la funzione è espressa come rapporto tra polinomi vale quanto scritto
        - 0/0 in trigonometria: esempio sen2x/(1-cosx) moltiplico sopra e sotto per (1+cosx)... ottenendo (senx)^2 al denominatore
        - caso particolare di senx/x quando x tende a 0 dimostrazione articolata:
          - nota: x misurato in radianti in una circonferenza di raggio 1 corrisponde alla misura dell'arco
          - si dimostra per x -> 0+ poi si sfrutta la parità della funzione senx/x (t =-x)
          - si usa il teorema del confronto
    - $\frac{\infty}{\infty}$
      - mettiamo in evidenza l'espressione di grado più alto dal denominatore e dal numeratore per poter semplificare (l'obbiettivo è quello di semplificare le espressioni che contengono l'infinito che crea l'indeterminazione. Casi particolari:
        - se la funzione fratta ha numeratore o denominatore con una radice quadrata, mettendo in evidenza un termine di secondo grado, portando puoi fuori di radice si ha un valore assoluto, che cambia segno a seconda che si tenda a + o - inf (vedi esempio)
    - $0 \cdot \infty$
      - in genere si utilizza (vedi a lato) questa trasformazione e ci rifacciamo ai casi precedenti
        - $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
    - $+\infty - \infty$
      - 1) si guarda cosa succede mettendo in evidenza il grado più alto
      - 2) ci possono essere operazioni in particolare in presenza di radicali - dove si utilizza il prodotto notevole (a+b)(a-b) moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso numero
    - 1^{∞} 0^{0} ∞^{0}
      - le tre forme indeterminate derivano da una proprietà scritta a lato. Vanno analizzate caso per caso, spesso si usa il limite fondamentale e le sue conseguenze (vedi a lato)
        - $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$ scrittura che serve per "vedere" le forme indeterminate
        - $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$
        - $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
        - $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$
        - $\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x} = \log a$
      - e è un numero irrazionale 2,718281.... come π è anche trascendente: non esistono equazioni a coefficienti razionali che abbiano per soluzioni tali numeri. (mentre è un numero irrazionale ma algebrico: l'equazione x^2-2=0 lo ha per soluzione $\sqrt{2}$
- la definizione di limite
  - $\lim_{x\to c} f(x) = l$
    - per ogni intorno del limite J(l) esiste un intorno del punto c, I(c) tale che presa una x diversa da c, in I(c) si abbia che f(x) appartenga all'intorno di J(l)
      - definizione di Intorno di un punto c (intervallo (a,b) che contiene il punto c)
    - l e c possono appartenere anche ad un'estensione di R, dove abbiamo anche i simboli ∞ $+\infty$ $-\infty$
      - definizione di intorno di infinito, di + infinito e di - infinito
    - dalla definizione generale prendono forma le varie espressioni metriche
  - verifica di un limite
    - significa verificare che il valore di un limite è corretto, andando a vedere che per ogni ε si riesce a trovare un intorno di c.
- i teoremi sui limiti
  - teorema di unicità del limite
    - osservazione: la dimostrazione è fatta per assurdo
  - teorema di permanenza del segno
  - teorema del confronto (o dei carabinieri)